数理解析研究所講究録 1303 巻 2003 年 80-87

Coxeter groups and their boundaries

宇都宮大学教育学部

保坂 哲也 (Tetsuya Hosaka)

1. 序

本稿では，無限 Coxeter 群とその「境界」と呼ばれる空間に関して得られた結果を紹介する.

まず，Coxeter 群と Coxeter 系の定義を与える.

Definition 1.1. 有限集合 S と写像 $m: S \times S \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ で次の条件をみたすものを考える.

(1) すべての $s, t \in S$ について $m(s,t) = m(t,s)$,
(2) すべての $s \in S$ について $m(s,s) = 1$,
(3) 相異なるすべての $s, t \in S$ について $m(s,t) \geq 2$.

このような S と m によって

$$W = \langle\, S \mid (st)^{m(s,t)} = 1 \text{ for } s, t \in S \,\rangle$$

と表現される群 W を **Coxeter 群**とよび，(W,S) の組を **Coxeter 系**と呼ぶ. また，更に条件

(4) 相異なるすべての $s, t \in S$ について $m(s,t) = 2$ or ∞

をみたすとき，(W,S) を **righ-angled Coxeter 系**とよぶ.

Coxeter 系に対して parabolic 部分群とよばれる部分群が定義される.

Definition 1.2. Coxeter 系 (W,S) と S の部分集合 T に対して，W_T を T によって生成される W の部分群とする. このような W_T を **parabolic 部分群**とよぶ.

Remark. Coxeter 系 (W,S) と S の部分集合 T に対して，上述の定義どおり Coxeter 群 W が

$$W = \langle\, S \mid (st)^{m(s,t)} = 1 \text{ for } s, t \in S \,\rangle$$

と表現されているとき，parabolic 部分群 W_T は

$$W_T = \langle T \mid (st)^{m|_{T\times T}(s,t)} = 1 \text{ for } s,t \in T \rangle$$

と表現できることが知られている (cf. [Bo]). 従って，(W_T, T) は再び Coxeter 系となる.

Coxeter 系を視覚的に捕らえるため，Coxeter diagram を定義する.

Definition 1.3. 有限の頂点をもち，ループをもたず，二つの頂点を結ぶ edge は高々一つである重みつきグラフ Γ で，各 edge に対応する数字は 2 以上の整数であるとき，Γ を **Coxeter diagram** とよぶ.

Coxeter 系 (W,S) に対して，Coxeter diagram $\Gamma(W,S)$ を次の方法で一意的に定めることができる:

(1) $\Gamma(W,S)$ の vertex set を S とする.
(2) $s,t \in S$ に対して，$m(s,t) < \infty$ のときに限り s と t は edge で結ばれているとする.
(3) $s,t \in S$ に対して，s と t が edge で結ばれているとき，この edge に対して整数 $m(s,t)$ を対応させる.

逆の方法により，Coxeter diagram に対して Coxeter 系が定義される. このように Coxeter 系と Coxeter diagram は対応がつく.

直接扱うことが難しい無限 Coxeter 群に対して，近年，幾何的なものを対応させて性質を調べることが活発に行われている. Coxeter 系から simplicial complex $L(W,S)$ と CAT(0) 空間 $\Sigma(W,S)$ を定義する.

Definition 1.4. Coxeter 系 (W,S) に対して，simplicial complex $L(W,S)$ を次で定義する:

(1) $L(W,S)$ の vertex set を S とする.
(2) S の空でない部分集合 T は，W_T が有限のときに限り $L(W,S)$ の simplex を張るとする.

Definition 1.5. (W,S) を Coxeter 系とする. このとき，離散位相を入れた W と $L(W,S)$ の cone $CL(W,S)$ の基底空間 $|CL(W,S)|$ の積 $W \times |CL(W,S)|$ 上の同値関係 $\sim$ を次で定める: $(w_1,x_1),(w_2,x_2) \in W \times |CL(W,S)|$ について

$$(w_1,x_1) \sim (w_2,x_2) \iff x_1 = x_2 \text{ and } w_1^{-1}w_2 \in W_{V(x_1)},$$

ただし $V(x) = \{s \in S \mid x \in \mathrm{St}(s, \mathrm{sd}\, L(W,S))\}$. ここで，$\mathrm{St}(s, \mathrm{sd}\, L(W,S))$ は $L(W,S)$ の重心細分 $\mathrm{sd}\, L(W,S)$ における s の closed star をあらわす. このとき，

$$\Sigma(W,S) := (W \times |CL(W,S)|)/\sim$$

と定義する．$\Sigma(W,S)$ は contractible となり ([D1])，1-skeleton が W の S に関する Cayley graph となるような CW-complex とみなすことができる ([D2]) ことが知られている．このとき，自然な距離に関して $\Sigma(W,S)$ は CAT(0) 空間となることが G.Moussong によって示されている ([M]).

一般に CAT(0) 空間は境界と呼ばれる空間を付け加えることによりコンパクト化される．

Definition 1.6. CAT(0) 空間 X に対して，X **の境界** ∂X を

$$\partial X = \{\xi : [0,\infty) \to X \text{ geodesic ray} \,|\, \xi(0) = x_0\}$$

と定義する．ただし $x_0 \in X$ である．実際には ∂X は x_0 の取り方によらないことが知られている ([BH]).

Coxeter 系の「境界」の定義は以下の通りである．

Definition 1.7. Coxeter 系 (W,S) から定義される CAT(0) 空間 $\Sigma(W,S)$ の境界 $\partial\Sigma(W,S)$ を **Coxeter 系** (W,S) **の境界** とよぶ.

Coxeter 群 W の代数的な性質とこの境界 $\partial\Sigma(W,S)$ の幾何的な性質を調べることが本研究における目的である．

2. Rigidity

一般に Coxeter 群によって Coxeter 系は決定されないことが知られている．

Example ([Bo, p.38 Exercise 8]). 以下の Figure 1 の diagram で定義される二つの Coxeter 群は同型となることが知られている．

Figure 1. Two distinct Coxeter diagrams for D_6

Example ([Mu]). 以下の Figure 2 の diagram で定義される二つの Coxeter 群は同型となることが，B.Mühlherr([Mu]) によって示されている．

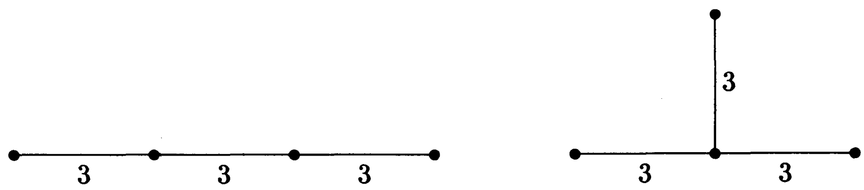

FIGURE 2. Coxeter diagrams for isomorphic Coxeter groups

有限な Coxeter 群については [Bo] にみられるように，完全に分類が与えられるなど，ある程度のことがわかっているのだが，無限な場合についてはまだほとんど分かっていない状況にある．Coxeter 群の代数的な rigidity の問題として次の問題がある．

Problem (Charny and Davis [CD]). どのような条件下で Coxeter 群は Coxeter 系を決定するのか?

Coxeter 系の境界に関しては，A.N.Dranishnikov による次の予想がある．

Rigidity Conjecture (Dranishnikov [Dr2]). Coxeter 系 (W,S), (W',S') に対して，Coxeter 群 W と W' が同型ならば，境界 $\partial\Sigma(W,S)$ と $\partial\Sigma(W',S')$ は同相となるであろう．

この二つの rigidity の問題について，特に Coxeter 系が right-angled な場合に関して研究を行った．Right-angled Coxeter 系については，Tits の結果 (cf. [Br2, p.50]) から次の word に関する性質が得られる．

Lemma 2.1. *Right-angled Coxeter* 系 (W,S) について，$w \in W$ が $w = s_1 \cdots s_l$ $(s_i \in S)$ と表せていて，$\ell(w) = l$ であるとする．このとき，$t, t' \in S$ について，$\ell(t(s_1 \cdots s_l)) = l + 1$ かつ $twt' = w$ ならば，$t = t'$ で $ts_i = s_i t$ $(i = 1, \ldots, l)$ が成り立つ．

この代数的な性質を用いて，次の定理を証明した．

Theorem 2.2 ([H3]). *Coxeter* 系 (W,S), (W',S') について，*Coxeter* 群 W と W' が同型で (W,S) が *right-angled* ならば，(W,S) と (W',S') は *Coxeter* 系として同型となる．特に，境界 $\partial\Sigma(W,S)$ と $\partial\Sigma(W',S')$ は同相となる．

これは，Dranishnikov の rigidity conjecture が，right-angled の場合には正しいことを示している．

3. Cohomology

Coxeter 群 W の群環 $\mathbb{Z}W$ 上の cohomology $H^*(W;\mathbb{Z}W)$ と, CAT(0) 空間 $\Sigma(W,S)$ の compact support の cohomology $H_c^*(\Sigma(W,S))$, そして 境界 $\partial\Sigma(W,S)$ の reduced Čech cohomology $\check{H}^*(\partial\Sigma(W,S))$ の間には次のような関係がある ([Br1], [D3]).

$$H^*(W;\mathbb{Z}W) \cong H_c^*(\Sigma(W,S)) \cong \check{H}^{*-1}(\partial\Sigma(W,S))$$

これらの cohomology に関して, M.W.Davis によって次の公式が与えられた.

Theorem 3.1 (Davis [D3]**).** *Coxeter* 系 (W,S) について, 次のアーベル群としての同型が成り立つ.

$$\begin{aligned} H^*(W;\mathbb{Z}W) &\cong H_c^*(\Sigma(W,S)) \cong \check{H}^{*-1}(\partial\Sigma(W,S)) \\ &\cong \bigoplus_{\substack{T\subset S \\ W_T \text{ is finite}}} \left(\mathbb{Z}(W^T) \otimes \tilde{H}^{*-1}(L(W_{S\setminus T}, S\setminus T))\right). \end{aligned}$$

ここで $\tilde{H}^*$ は *reduced cohomology* をあらわし, $\mathbb{Z}(W^T)$ は W^T 上の *free abelian group* をあらわす. ただし W^T の定義は次のとおりである. まず, 各 $w \in W$ に対して $S(w) = \{s \in S \mid \ell(ws) < \ell(w)\}$ と定義する. ここで $\ell(w)$ は w を表現する S の元のワードの長さの最小値である. このとき, S の部分集合 T に対して $W^T = \{w \in W \mid S(w) = T\}$ と定義する.

この公式により, Coxeter 群の cohomology は原理的に計算することが可能となったのだが, 定義からもわかるように, 各 $T \subset S$ に対して W^T の元の個数を実際に求めるのは困難である. この Davis の公式を単純化するのに次の F.T.Farrell の結果を用いた.

Theorem 3.2 (Farrell [F]**).** Γ を *type FP* の *finitely presented* な群とし, $n = \min\{i \mid H^i(\Gamma;\mathbb{Z}\Gamma) \neq 0\}$ とする. このとき $H^n(\Gamma;\mathbb{Z}\Gamma)$ が有限生成なアーベル群ならば, Γ は *n-dimensional Poincaré duality group* となる, すなわち, $H^n(\Gamma;\mathbb{Z}\Gamma) \cong \mathbb{Z}$ で $i \neq n$ について $H^i(\Gamma;\mathbb{Z}\Gamma) = 0$ となる.

いま Coxeter 系 (W,S) に対して一意的に決まる S の部分集合 $\tilde{S}$ の定義を与える: S の分割 $\{S_1,\ldots,S_r\}$ で, 各 (W_i,S_i) が既約で

$$W = W_{S_1} \times \cdots \times W_{S_r}$$

となるものを考え,

$$\tilde{S} = \bigcup\{S_i \mid W_{S_i} \text{ は無限群 }\}$$

と定義する．この $\tilde{S}$ について，$L(W_{S\setminus T}, S\setminus T)$ が contractible でなく W^T が有限ならば，$T = S\setminus\tilde{S}$ となり，W^T は一点集合となることを Theorem 3.2を用いて示した．また，$S\setminus\tilde{S}\not\subset T$ で W_T が有限ならば $L(W_{S\setminus T}, S\setminus T)$ は contractible となることも示すことができる．以上の考察により，Theorem 3.1 を以下のように単純化した．

Theorem 3.3 ([H1]). *Coxeter* 系 (W,S) について，次の同型が成り立つ．

$$\begin{aligned} H^*(W;\mathbb{Z}W) &\cong \check{H}^{*-1}(\partial\Sigma(W,S)) \\ &\cong \tilde{H}^{*-1}(L(W_{\tilde{S}},\tilde{S}))\oplus\left(\bigoplus_{\substack{T\subset S\\ W_T \text{ is finite}\\ S\setminus\tilde{S}\subsetneq T}}\bigoplus_{\mathbb{Z}}\tilde{H}^{*-1}(L(W_{S\setminus T}, S\setminus T))\right). \end{aligned}$$

この定理から，次の系を得る．

Corollary 3.4 ([H1]). *Coxeter* 系 (W,S) について次は同値:

(1) $H^i(W;\mathbb{Z}W)$ は有限生成である;
(2) $H^i(W;\mathbb{Z}W)\cong\tilde{H}^{i-1}(L(W_{\tilde{S}},\tilde{S}))$;
(3) W_T が有限となる $T\subset S$ について，
$S\setminus\tilde{S}\subsetneq T$ ならば $\tilde{H}^{i-1}(L(W_{S\setminus T}, S\setminus T)) = 0$.

4. Cohomological dimension

Coxeter 群と境界の cohomological dimension に関しては M.Bestvina と G.Mess による次の関係式が知られている ([BM], [B2]).

$$\text{c-dim}_R\,\partial\Sigma(W,S) = \text{vcd}_R\,W - 1,$$

ここで，$\text{c-dim}_R\,\partial\Sigma(W,S)$ は compact 距離空間 $\partial\Sigma(W,S)$ の R 上の cohomological dimension で次で定義される:

$$\begin{aligned} &\text{c-dim}_R\,\partial\Sigma(W,S) \\ &\quad := \sup\{i \mid \check{H}^i(\partial\Sigma(W,S),A;R)\neq 0 \text{ for some closed set } A\subset\partial\Sigma(W,S)\}. \end{aligned}$$

また，$\text{vcd}_R\,W$ は Coxeter 群 W の環 R 上の virtual cohomological dimension で

$$\text{vcd}_R\,W = \sup\{i \mid H^i(W;RW)\neq 0\}$$

と書ける．

M.W.Davis は不等式 $\mathrm{vcd}_{\mathbb{Z}} W \leq \dim L(W,S)$ が成り立つことを[D1] の中で示しており，その後 A.N.Dranishnikov は，$L(W,S)$ の subcomplex の cohomology の言葉で，$\mathrm{vcd}_R W$ を計算するための公式を[Dr1] の中で与えた．この公式の応用として Dranishnikov が与えた定理を次のように一般化した．

Theorem 4.1 ([Dr1], [HY]). *W を Coxeter 群，R を単項イデアル整域とするとき次が成り立つ:*

(a) R の素イデアル I について $\mathrm{vcd}_{\mathbb{Q}} W \leq \mathrm{vcd}_{R/I} W \leq \mathrm{vcd}_R W \leq \mathrm{vcd}_{\mathbb{Z}} W$ が成り立つ．

(b) 有限個を除いた R の素イデアル I について $\mathrm{vcd}_{R/I} W = \mathrm{vcd}_{\mathbb{Q}} W$ が成り立つ．

(c) R が体でないとき，R の自明でない素イデアル I で $\mathrm{vcd}_{R/I} W = \mathrm{vcd}_R W$ をみたすものが存在する．

(d) $\mathrm{vcd}_R(W \times W) = 2\,\mathrm{vcd}_R W$.

ここで，Dranishnikov によって与えられたのは (a) と $R = \mathbb{Z}$ の場合の (b), (c), (d) である．

更に，Dranishnikov の $\mathrm{vcd}_R W$ の公式と Bestvina と Mess の結果を用いて次の定理を得ている．

Theorem 4.2 ([HY]). *(W,S) を right-angled Coxeter 系，R を単項イデアル整域，$n = \text{c-dim}_R\, \partial\Sigma(W,S)$ とする．このとき，列 $T_0 \subset T_1 \subset \cdots \subset T_{n-1} \subset S$ で $\text{c-dim}_R\, \partial\Sigma(W_{T_i}, T_i) = i$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ をみたすものが存在する．*

Dranishnikov は [Dr1] の中で，

$$\mathrm{vcd}_{\mathbb{Z}} W = 3, \quad \mathrm{vcd}_{\mathbb{Q}} W = 2$$

となる Coxeter 群 W を構成している．これは境界では，

$$\text{c-dim}_{\mathbb{Z}}\, \partial\Sigma(W,S) = 2, \quad \text{c-dim}_{\mathbb{Q}}\, \partial\Sigma(W,S) = 1$$

が成り立つことを意味する．ここで次の問題が起こる．

Problem (Dranishnikov [Dr1]**).** Coxeter 群 W で

$$\mathrm{vcd}_{\mathbb{Z}} W \geq 4, \quad \mathrm{vcd}_{\mathbb{Q}} W = 2$$

となるものが存在するか? すなわち，Coxeter 系の境界として

$$\text{c-dim}_{\mathbb{Z}}\, \partial\Sigma(W,S) \geq 3, \quad \text{c-dim}_{\mathbb{Q}}\, \partial\Sigma(W,S) = 1$$

となるものを実現できるか?

これはまだ未解決な問題である．

References

[B1] M.Bestvina, *The virtual cohomological dimension of Coxeter groups*, Geometric Group Theory Vol. 1, LMS Lecture Notes, vol. 181, 1993, pp. 19–23.

[B2] M.Bestvina, *Local homology properties of boundaries of groups*, Michigan Math. J. **43** (1996), 123–139.

[BM] M.Bestvina and G.Mess, *The boundary of negatively curved groups*, Jour. of Amer. Math. Soc. **4** **(no. 3)** (1991), 469–481.

[Bo] N.Bourbaki, *Groupes et Algebrès de Lie*, Chapters IV-VI, Masson, Paris, 1981.

[BH] M.R.Bridson and A.Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundl. Math. Wiss., Vol. 319, Springer, Berlin, 1999.

[Br1] K.S.Brown, *Cohomology of groups*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982.

[Br2] K.S.Brown, *Buildings*, Springer-Verlag, 1980,

[CD] R.Charney and M.W.Davis, *When is a Coxeter system determined by its Coxeter group?* J. London Math. Soc. **61** **(no.2)** (2000), 441–461.

[D1] M.W.Davis, *Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space*, Ann. of Math. **117** (1983), 293–324.

[D2] M.W.Davis, *Nonpositive curvature and reflection groups*, in Handbook of geometric topology (Edited by R.J.Daverman and R.B.Sher), North-Holland, Amsterdam, 2002, pp.373–422.

[D3] M.W.Davis, *The cohomology of a Coxeter group with group ring coefficients*, Duke Math. J. **91** **(no.2)** (1998), 297–314.

[Dr1] A.N.Dranishnikov, *On the virtual cohomological dimensions of Coxeter groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** **(no.7)** (1997), 1885–1891.

[Dr2] A.N.Dranishnikov, *On boundaries of hyperbolic Coxeter groups*, Topology Appl. **110** **(no.1)** (2001), 29–38.

[F] F.T.Farrell, *Poincaré duality and groups of type (FP)*, Comment. Math. Helv. **50** (1975), 187–195.

[H1] T.Hosaka, *On the cohomology of Coxeter groups*, J. Pure Appl. Algebra **162** (2001), 291–301.

[H2] T.Hosaka, *Parabolic subgroups of finite index in Coxeter groups*, J. Pure Appl. Algebra **169** (2002), 215–227.

[H3] T.Hosaka, *Determination up to isomorphism of right-angled Coxeter systems*, preprint, 2001.

[HY] T.Hosaka and K.Yokoi, *The boundary and the virtual cohomological dimension of Coxeter groups*, Houston J. Math. **26** **(no.4)** (2000), 791–805.

[Hu] J.E.Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge University Press, 1990.

[M] G.Moussong, *Hyperbolic Coxeter groups*, Ph.D. thesis, The Ohio State University, 1988.

[Mu] B.Mühlherr, *On isomorphisms between Coxeter groups*, to appear in Designs, Codes and Cryptography.